Ejercicios de volúmenes de funciones

1. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

2. Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.

3. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta $y = x + 2$ y las coordenadas correspondientes a $x = 4$ y $x = 10$, al girar alrededor de OX.

4. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide $y = \text{sen } x$, al girar alrededor del eje OX.

5. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

6.Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función $f(x) = 1/2 + \cos x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

7. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 6x - x^2$, $y = x$.

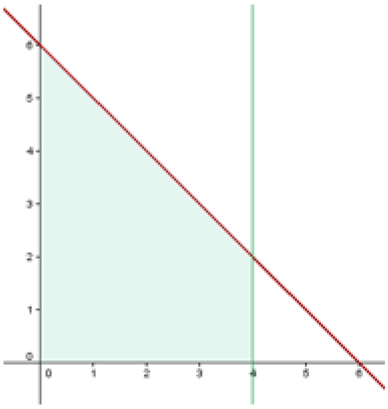
8.Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

9. Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$alrededor del eje OX.

Soluciones ejercicios de volúmenes de funciones

1

Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 − x, y = 0, x = 0, x = 4.



$$V = \pi\int_0^4 (6-x)^2\ dx = \pi\left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{208}{3}\ u^3$$

2

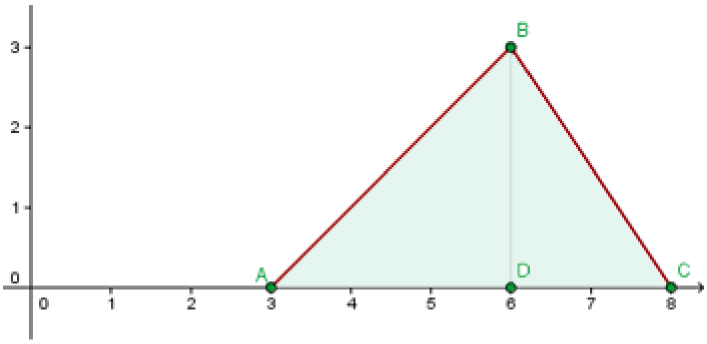
Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.

Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = x - 3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = -\frac{3}{2}(x-8)$$



$$V = \pi\int_3^6 (x-3)^2\ dx + \pi\int_6^8 \left[-\frac{3}{2}(x-8)\right]^2\ dx =$$

$$= \pi\int_3^6 \left(x^2 - 6x + 9\right) dx + \pi\int_6^8 \left[\frac{9}{4}\left(x^2 - 16x + 64\right)\right] dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 19x\right]_3^6 + \frac{9\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 64x\right]_6^8 =$$

$$= \pi(72 - 108 + 54 - 9 + 27 - 27) + \frac{9\pi}{4}\left(\frac{512}{3} - 512 + 512 - 72 + 288 - 384\right) = 15\pi\, u^3$$

3

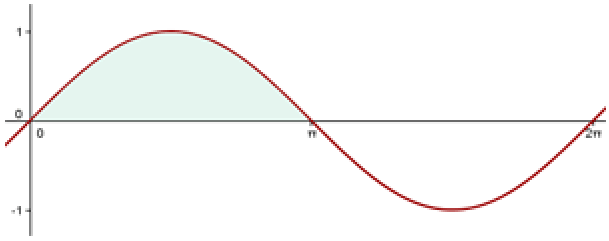
Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta y = x + 2 y las coordenadas correspondientes a x = 4 y x = 10, al girar alrededor de OX.

$$V = \pi\int_4^{10}(x+2)^2\,dx V = \pi\int_4^{10}(x^2+4x+4)^2\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_4^{10} =$$

$$= \pi\left(\frac{1000}{3} + 200 + 40 - \frac{64}{3} - 32 - 16\right) = 504\,\pi\, u^3$$

4

Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.



$$V = \pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

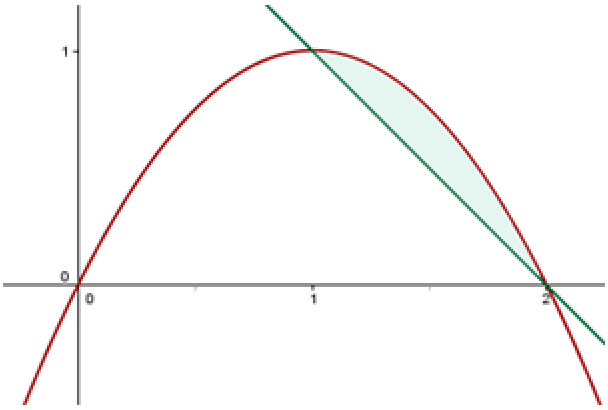
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}\,u^3$$

5

Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 2x −x^2, y = −x + 2.

Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \qquad 2x - x^2 = -x + 2 \qquad (1,1) \qquad (2,0)$$



La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$V=\pi\int_1^2\left[\left(2x-x^2\right)^2-\left(-x+2\right)^2\right]dx=\pi\int_1^2\left(x^4-4x^3+3x^2+4x-4\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+x^3+2x^2-4x\right]_1^2=\frac{\pi}{5}u^3$$

6

Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función f(x) = 1/2 + cos x, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = π.

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}+\cos x+\cos^2x\right)dx=$$

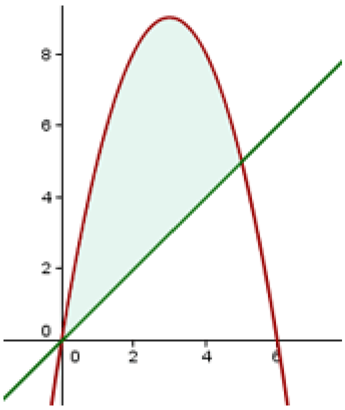
$$=\pi\left[\frac{1}{4}x+\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{4}u^3$$

7

Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 6x − x^2, i = x.

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=x \end{cases} \qquad 6x-x^2=x \qquad\qquad (0,0) \quad (5,5)$$



La parábola quiera por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$V=\pi\int_0^5\left[\left(6x-x^2\right)^2-x^2\right]dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-3x^4+\frac{35}{3}x^3\right]_0^5=\frac{625\pi}{3}u^3$$

8

Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

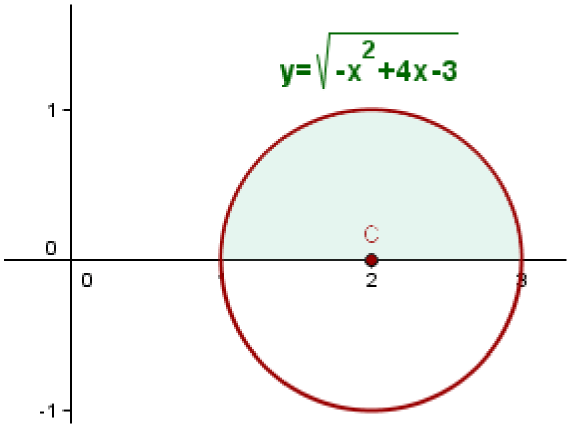
$$x^2-4x+4-4+y^2=-3$$

$$(x-2)^2+y^2=1$$

El centro de la circunferencia es C(0, 1) y el radio r = 1.

Puntos de corte con el eje OX:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (1,0) \qquad (3,0)$$

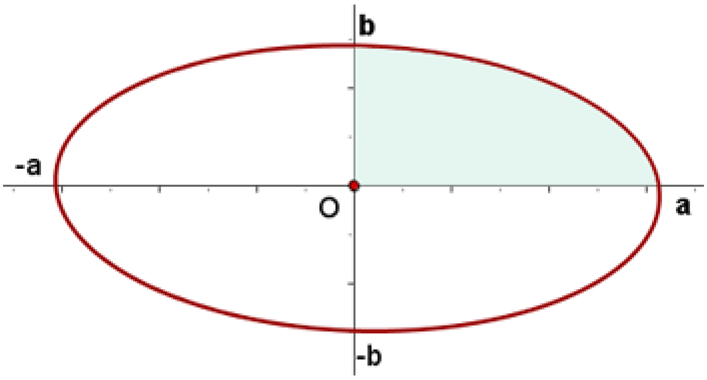


$$V = \pi\int_1^3 \left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)^2 \, dx = \pi\int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} u^3$$

9

Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OX.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por ser la elipse una curva simétrica, el volumen pedido es 2 en veces el volumen engendrado por el arco $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ entre x = 0 y x = a.

$$V = 2\pi\int_0^a \left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\right] dx = \frac{2b^2\pi}{a^2}\int_0^a \left(a^2-x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2b^2\pi}{a^2}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}ab^2\pi$$